ОЛИМПИАДА «АНТОК»

8-10 класс

Задание № 1 (2 балла)

У Сережи есть 50 конфет, которые он хочет раздать трем друзьям: Саше, Маше и Жене. Сережа пообещал каждому другу дать немного конфет. Саше Сережа хочет дать не меньше 10 конфет, а Маше – не меньше 15-ти конфет. Женя и Маша должны получить равное количество конфет. При этом Сережа хочет, чтобы произведение количества конфет у друзей было максимально возможным. Сколько конфет получит каждый друг, и каково будет максимальное произведение?

Решение.

Известно, что для фиксированной суммы трех положительных чисел произведение максимально, если числа максимально равны, то есть $50:3=16\frac{2}{3}$

Возьмем близкое к целым 16, 17 и 17. Проверим ограничения. Саше Сережа даст 16 конфет, это больше 10, Маше 17 конфет - больше 15 конфет. А Ване даст столько же, сколько Маше -17. Произведение равно17*17*16=4624.

Если попробовать слегка сдвинуть числа, то увидите, что произведение будет меньше.

Задание № 2 (3 балла)

Упростите выражение:

$$\left(\sqrt{1+\left(\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right)^{2}}\right)^{-6}-\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}$$

$$\left\{\sqrt{1+\left(\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right)^{2}}\right\}^{-6}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}$$

Решение. Уменьшаемое равно

$$\left(\sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}\cdot 2}}\right)^{-6}=\left(1+a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1\right)^{-3}=$$

$$=\left(a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3}=a^{-2}x^{2}=\frac{x^2}{a^2}$$

Вычитаемое равно

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4-2a^2x^2+x^4+4a^2x^2}=\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4+2a^2x^2+x^4}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^2+x^2)^2}=\frac{x^2+a^2}{a^2}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2+a^2}{a^2}=-\frac{a^2}{a^2}=-1$$

Ответ: -1

Задание № 3 (3 балла)

Два велосипедиста двигаются по кольцевому треку. Они встречаются, когда едут в одном направлении каждые 60 минут. Если бы они двигались навстречу, они бы встречались каждые 15 минут. При движении навстречу расстояние между ними уменьшилось с 24 *м* до 6 *м* за 6 секунд. Найдите скорости каждого велосипедиста в *м/с*.

Дано:

- Встречи в одном направлении: $T_1 = 60$ минут
- Встречи навстречу: $T_2 = 15$ минут
- При движении навстречу расстояние уменьшилось с 24 м до 6 м за $\Delta t = 6$ секунд
- Нужно найти скорости v_1 и v_2 в м/с

Обозначим длину трека как L.

---

1. Переводим минуты в секунды

$$T_1 = 60 \cdot 60 = 3600 \text{ с}, \quad T_2 = 15 \cdot 60 = 900 \text{ с}$$

---

2. Уравнения для движения

В одном направлении:

$$L = T_1 |v_1 - v_2| \implies |v_1 - v_2| = \frac{L}{3600}$$

Навстречу:

$$L = T_2 (v_1 + v_2) \implies v_1 + v_2 = \frac{L}{900}$$

---

3. Отношение скоростей

$$v_1 + v_2 = \frac{L}{900}, \quad v_1 - v_2 = \frac{L}{3600}$$

Складываем уравнения:

$$2v_1 = \frac{L}{900} + \frac{L}{3600} = \frac{4L + L}{3600} = \frac{5L}{3600} \implies v_1 = \frac{5L}{7200} = \frac{L}{1440}$$

$$v_2 = v_1 - \frac{L}{3600} = \frac{L}{1440} - \frac{L}{3600} = \frac{5L - 2L}{7200} = \frac{3L}{7200} = \frac{L}{2400}$$

---

4. Используем данные о сближении

При движении навстречу скорость сближения:

$$v_1 + v_2 = \frac{24 - 6}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ м/с}$$

Но мы знаем $v_1 + v_2 = \frac{L}{900}$. Тогда:

$$\frac{L}{900} = 3 \implies L = 2700 \text{ м}$$

---

5. Находим скорости

$$v_1 = \frac{L}{1440} = \frac{2700}{1440} = 1.875 \text{ м/с}$$

$$v_2 = \frac{L}{2400} = \frac{2700}{2400} = 1.125 \text{ м/с}$$

Задание №4 (4 балла)

У мамы есть корзинка с одинаковыми по размеру пирожками трех вкусов. Она не успела нанести знаки на пирожки, чтобы их отличить друг от друга. Пирожки трех вкусов: с клубничной начинкой, с яблочным повидлом и даже с апельсиновым джемом. Марк собирается съесть пирожок из корзинки и спрашивает: «Мама. Какого вкуса начинка мне попадется?» Мама отвечает: «Апельсиновая». Марк уточняет: «Значит, вероятнее всего пирожок с апельсиновой начинкой?» Мама отвечает: «Нет, Марк, ты не прав. Вероятнее всего не с апельсиновой». Какое наименьшее количество пирожков может быть в коробке, если мама, конечно же, всегда говорит Марку правду.

Решение.
Если пирожков какого-то вкуса нет, то ситуация, описанная в условии, невозможна, так как сказано, что в корзине есть пирожки всех трёх вкусов. Следовательно, в корзине обязательно есть хотя бы один клубничный, один яблочный и один апельсиновый пирожок.

Раз мама сказала: «Апельсиновая», значит, апельсиновых пирожков не меньше двух.

Пусть апельсиновых два.
Тогда клубничных и яблочных вместе должно быть хотя бы два (по одному каждого вкуса). В этом случае вероятность вынуть апельсиновый пирожок равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, а вероятность вынуть «не апельсиновый» тоже равна $\frac{1}{2}$. Но по условию вероятность «не апельсинового» должна быть больше. Значит, этот вариант не подходит.

Пусть апельсиновых три.
Чтобы вероятность «не апельсинового» была больше, клубничных и яблочных вместе должно быть хотя бы 4. Тогда общее количество пирожков будет не меньше 7.

Пример: 3 апельсиновых, 2 клубничных и 2 яблочных пирожка. В этом случае вероятность апельсинового $\frac{3}{7}$, а вероятность «не апельсинового» $\frac{4}{7}$, и условие задачи выполняется.

Ответ: наименьшее количество пирожков в корзине — **7.**

Задание №5 (5 баллов)

Решите уравнение: $$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

Решение. Освободимся от знаменателя, $x \neq 0$.

$$2\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2-2\sqrt{x-\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x}}=3\sqrt{x}$$

$$2\left(x+\sqrt{x}\right)-2\sqrt{x^2-(\sqrt{x})^2}=3\sqrt{x}$$

$$2x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x^2-x}=3\sqrt{x}$$

$$2x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x(x-1)}=3\sqrt{x}$$

$$2x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}\sqrt{x-1}-3\sqrt{x}=0$$

$$2x-\sqrt{x}-2\sqrt{x}\sqrt{x-1}=0$$

$$\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}-1=0$$

$$2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}=1$$

$$\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}\right)^2=1^2$$

$$4\left(x-2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+x-1\right)=1$$

$$2x-2\sqrt{x^2-x}-4=1$$

$$2x-2\sqrt{x^2-x}=5$$

$$2x-5=2\sqrt{x^2-x}$$

Возводим обе части в квадрат

$$(2x-5)^2=\left(2\sqrt{x^2-x}\right)^2$$

$$4x^2-20x+25=4(x^2-x)$$

$$4x^2-20x+25=4x^2-4x$$

$$-16x=-25$$

$$x=\frac{25}{16}$$

Ответ: 25/16

Задание №6 (6 баллов)

На витринах соседних магазинов висят скидки, которые проводятся в период распродаж. Естественно, скидки – это двузначные числа. В данном конкретном случае оба магазина установили скидки, которые начинаются с цифры 4, а вторые цифры этих чисел не равны 4. Проходя мимо Петя заметил, что если написать эти числа наоборот и перемножить, то произведение не изменится. Какие скидки установили каждый из магазинов и написали их на стекле витрин?

Решение.

Пусть числа имели вид 4a и 4b, где $a \neq 4, b \neq 4$.

Обратные им числа будут $a4$ и $b4$.

Условие задачи:

$$(40+a)(40+b) = (10a+4)(10b+4).$$

Раскроем скобки:

$$1600 + 40a + 40b + ab = 100ab + 40a + 40b + 16.$$

Упростим:

$$1600 + ab = 100ab + 16.$$

$$1584 = 99ab.$$

$$ab = \frac{1584}{99} = 16.$$

Значит, $a \cdot b = 16$.

Возможные пары цифр:

- $a = 2, b = 8$,
- $a = 8, b = 2$,
- $a = 16, b = 1$ (невозможно, т.к. не цифра),
- $a = 1, b = 16$ (невозможно).

Таким образом, подходят числа: 42 и 48.

Проверка:

- $42 \times 48 = 2016$.
- Перевернутые: $24 \times 84 = 2016$.

Условие выполняется. ✅

Задание№ 7 (7 баллов)

Владислав начал ежедневные тренировки. В первый день он пробежал некоторое, довольно большое, количество минут, а каждый следующий день пробегал в 3 раза меньше, чем в предыдущий. Тренировки продолжались бесконечно и продолжаются сейчас, но по чуть-чуть, пока Владиславу не надоело этим заниматься. Когда он подсчитал все затраченное время, то обнаружил, что в сумме за все время он пробежал 60 минут, при этом за дни с нечетными номерами (1-ый, 3-ий, 5-ый и т.д.) – 45 минут, а за дни с четными номерами – 15 минут. Сколько минут длилась его пробежка в самый первый день?

Решение

Пусть первый день он пробежал a минут, а знаменатель геометрической прогрессии — r (убывающая прогрессия, значит $|r| < 1$).

Сумма всех дней:

$$S = \frac{a}{1-r} = 60.$$

Сумма дней с нечётными номерами:

$$S_{\text{неч}} = \frac{a}{1-r^2} = 45.$$

Разделим второе равенство на первое:

$$\frac{S_{\text{неч}}}{S} = \frac{a/(1-r^2)}{a/(1-r)} = \frac{1}{1+r} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$

Отсюда

$$1 + r = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{3}.$$

Подставим $r = \frac{1}{3}$ в формулу для S:

$$\frac{a}{1-\frac{1}{3}} = 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\frac{2}{3}} = 60 \quad \Rightarrow \quad a = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40.$$

Ответ: в первый день он пробежал **40 минут**. (Проверка: прогрессия $40,\ 40/3,\ 40/9, \ldots$; общая сумма $= 60$, нечётные дни $= 45$, чётные $= 15$.)

Задание № 8 (7 баллов)

В аквариуме объемом 9 литров вода содержит некоторый объем растворенных газов, из которых кислород составляет 27 %. Из аквариума три раза подряд откачивают одно и то же количество литров воды и каждый раз доливают такое же количество чистой воды, не содержащей кислорода. После этих трех итераций концентрация кислорода в аквариуме стала 8 %. Сколько литров воды откачивали и заменяли каждый раз?

Объём аквариума $V = 9$ л. Пусть за один раз откачивают x литров и доливают x литров чистой (без кислорода) воды. После каждой такой операции концентрация кислорода умножается на коэффициент

$$\frac{V-x}{V} = \frac{9-x}{9},$$

потому что остаётся только доля $(9-x)/9$ прежней воды с кислородом.

После трёх одинаковых операций концентрация станет

$$0{,}27 \cdot \left(\frac{9-x}{9}\right)^3 = 0{,}08.$$

Разделим обе части на $0{,}27$:

$$\left(\frac{9-x}{9}\right)^3 = \frac{0{,}08}{0{,}27} = \frac{8}{27}.$$

Тогда

$$\frac{9-x}{9} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда $9 - x = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$, значит $x = 3$ литра.

Проверка: 27% → после 1-й замены $27\% \cdot \frac{2}{3} = 18\%$, после 2-й — 12%, после 3-й — 8%. Всё сходится.

Ответ: каждый раз откачивали и заменяли 3 **литра**.

Задание №9 (8 баллов) **Найти все значения параметра *m*, при которых система уравнений**

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy) \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

Имеет действительное решение.

Из первого уравнения находим y= $\frac{x-m}{1+mx}$, из второго y=- $\frac{2+x}{1+x}$

Приравняв эти два выражения, получаем $\frac{x-m}{1+mx}$ = $\frac{2+x}{1+x}$

Отсюда имеем уравнение $(1+m)x^2+(2+m)x+(2-m)=0$

Это уравнение имеет действительные корни при условии $(2+m)^2-4(1+m)(2-m)\geq 0$

После упрощения левой части получим выражение $5m^2-4\geq 0$

Откуда $|m|\geq \frac{2}{\sqrt{5}}$

При этом условии x имеет действительные значения, следовательно, действительные значения имеет и $y=-\frac{2+x}{1+x}$

Задание № 10 (8 баллов)

- Утром турист отправился пешком из Орлово в Макарье. Через a часов после его выхода навстречу ему из Макарье выехал курьер на велосипеде. Они встретились через b часов после выезда курьера. Если известно, что курьер доезжает от Орлово до Макарье на c часов быстрее, чем турист проходит это расстояние пешком, найдите, сколько времени тратит каждый из них на весь путь.

Решение.

Если курьеру требуется *x* часов, то туристу требуется *(x+c)* часов. Обозначим через y расстояние AB (скажем в километрах). До места встречи турист прошел $\frac{y(a+b)}{x+c}$ км, а курьер проехал $\frac{by}{x}$ км. Имеем уравнение $\frac{y(a+b)}{x+c}+\frac{by}{x}=y$. Так как $y\neq 0$, то $\frac{(a+b)}{x+c}+\frac{b}{x}=1$, или $x^2-(a+2b-c)x-bc=0$. Это уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень, так как произведение корней равно отрицательному числу $-bc$.
Годится только одно положительное решение

$x=\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}$.

Расстояние y остается неопределенным. Величину *(x+c)* можно найти либо из вышеприведенного выражения, либо из уравнения $\frac{(a+b)}{x+c}+\frac{b}{x}=1$, положив $x+c=z$.

Получим уравнение $\frac{a+b}{z}+\frac{b}{z-c}=1$. Берем только положительное решение.

Ответ. Курьеру требуется $\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}$ часов. Туристу требуется $\frac{a+2b+c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}=\frac{a+2b+c+\sqrt{(a+2b+c)^2-4(a+b)c}}{2}$ часов.

Задание№11 (8 баллов)

В треугольнике *ABC* угол *A 60* градусов. Биссектриса угла *A* делит сторону *BC* на отрезки *BD* и *DC* так, что *BD:DC=2:1*. Найдите угол *B*. Воспользуйтесь тем, что биссектриса делит противоположную сторону на части пропорционально прилежащим боковым сторонам.

Решение

1. **Используем теорему о биссектрисе**

Биссектриса делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow AB : AC = 2 : 1$$

2. **Применяем теорему косинусов**

Обозначим: $AB = 2x$, $AC = x$, $BC = a$.

По закону косинусов для угла $A = 60^\circ$:

$$a^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Подставим:

$$a^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 4x^2 + x^2 - 2x^2 = 3x^2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3}x$$

По теореме синусов

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC} \quad \Rightarrow \frac{\sin B}{x} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{2x}$$

$$\sin B = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow B = 30^\circ$$

Задание№12 (9 баллов)

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ xy+yz+zx=47 \\ (z-x)(z-y)=2 \end{cases}$$

Решение.

Третье уравнение представим в виде $z^2-xz-yz+xy=2$. Сложив его со вторым, получим

$z^2+2xy=49$.

Отсюда $z^2=49-2xy$. Подставим это выражение в первое уравнение. Получим $(x+y)^2=49$. То есть $x+y=\pm 7$. Положим сначала $x+y=7$.

Представим второе уравнение в виде $xy+z(x+y)=47$ и сюда подставим выражение $xy=\dfrac{49-z^2}{2}$ и значение $x+y=7$. Получаем $z^2-14z+45=0$.

Отсюда $z_1=5$, $z_2=9$.

Если $z_1=5$, то $xy=\dfrac{49-z^2}{2}=12$. Если $z_2=9$, $xy=\dfrac{49-z^2}{2}=-16$. Имеем две системы:

$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=-16 \end{cases}$.

Каждая из этих систем имеет по два решения. Всего получаем 4 решения

1) $x=3, y=4, z=5$
2) $x=4, y=3, z=5$
3) $x=\dfrac{7+\sqrt{113}}{2}, y=\dfrac{7-\sqrt{113}}{2}, z=9$
4) $x=\dfrac{7-\sqrt{113}}{2}, y=\dfrac{7+\sqrt{113}}{2}, z=9$

Теперь положим $x+y=-7$ и тем же способом найдем еще 4 решения.

5) $x=-3, y=-4, z=-5$
6) $x=-4, y=-3, z=-5$
7) $x=\dfrac{-7+\sqrt{113}}{2}, y=\dfrac{-7-\sqrt{113}}{2}, z=-9$
8) $x=\dfrac{-7-\sqrt{113}}{2}, y=\dfrac{-7+\sqrt{113}}{2}, z=-9$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!