ОЛИМПИАДА АНТОК

6-7 КЛАССЫ

Задание №1 (2 балла)

Я задумал число, умножил его на 9, отнял 27, разделил на 3, прибавил 15 и получил 36. Какое число я задумал?

1. Пусть задуманное число — это x.
2. По условию задачи мы сначала умножили его на 9: $9x$.
3. Затем отняли 27: $9x - 27$.
4. После этого разделили на 3: $\frac{9x-27}{3}$.
5. Прибавили 15: $\frac{9x-27}{3} + 15$.
6. В итоге мы получили 36:

$$\frac{9x-27}{3} + 15 = 36$$

Теперь решим уравнение:

1. Сначала уберем 15 с правой стороны:

$$\frac{9x-27}{3} = 36 - 15$$

$$\frac{9x-27}{3} = 21$$

2. Умножим обе стороны на 3:

$$9x - 27 = 63$$

3. Прибавим 27 к обеим сторонам:

$$9x = 63 + 27$$

$$9x = 90$$

4. Разделим обе стороны на 9:

$$x = \frac{90}{9}$$

$$x = 10$$

Таким образом, задуманное число — это 10.

Задание №2 (3 балла)

Четыре крана заполняют резервуар. Первый кран заполняет резервуар за 1 час, второй за 2 часа, третий за 3 часа и четвертый за 4 часа. За сколько времени все 4 крана вместе заполнят резервуар.

Обозначим время, за которое все четыре крана вместе заполнят резервуар, как t часов.

Сначала найдем, какую долю резервуара заполняет каждый кран за 1 час:

- Первый кран заполняет резервуар за 1 час, значит, его скорость: $\frac{1}{1} = 1$ резервуар в час.
- Второй кран заполняет резервуар за 2 часа, значит, его скорость: $\frac{1}{2}$ резервуара в час.
- Третий кран заполняет резервуар за 3 часа, значит, его скорость: $\frac{1}{3}$ резервуара в час.
- Четвёртый кран заполняет резервуар за 4 часа, значит, его скорость: $\frac{1}{4}$ резервуара в час.

Теперь запишем уравнение для общего времени:

$$\text{Скорость первого крана} + \text{Скорость второго крана} + \text{Скорость третьего крана} + \text{Скорость четвёртого крана} = \text{Общая скорость}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{t}$$

Теперь найдем общий знаменатель для дробей. Общий знаменатель для 1, 2, 3 и 4 — это 12.

Запишем каждую дробь с общим знаменателем:

$$1 = \frac{12}{12}, \quad \frac{1}{2} = \frac{6}{12}, \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12}, \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Теперь сложим все эти дроби:

$$\frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}$$

Теперь подставим это в уравнение:

$$\frac{25}{12} = \frac{1}{t}$$

Теперь решим это уравнение относительно t:

$$t = \frac{12}{25}$$

Теперь переведём это в часы и минуты. Если перевести $\frac{12}{25}$ в часы, то мы можем умножить на 60, чтобы узнать, сколько это минут:

$$t \approx \frac{12}{25} \times 60 = 28.8 \text{ минут}$$

Задание№ 3 (4 балла)

На сколько процентов и как изменится объем прямоугольного параллелепипеда, если его длину увеличить на 20 % и ширину увеличить на 20%, а высоту уменьшить на 40 %.

- Длина L
- Ширина W
- Высота H

Сначала найдем объем параллелепипеда до изменений. Объем V вычисляется по формуле:

$$V = L \times W \times H$$

Теперь увеличим длину и ширину на 20%, а высоту уменьшим на 40%. Для этого вычислим новые размеры:

1. Длина:

$$L' = L + 0.2L = 1.2L$$

2. Ширина:

$$W' = W + 0.2W = 1.2W$$

3. Высота:

$$H' = H - 0.4H = 0.6H$$

Теперь найдем новый объем V':

$$V' = L' \times W' \times H' = (1.2L) \times (1.2W) \times (0.6H)$$

Упростим это выражение:

$$V' = 1.2 \times 1.2 \times 0.6 \times L \times W \times H$$

$$V' = 1.44 \times 0.6 \times V = 0.864V$$

Теперь можем рассчитать, как изменился объем:

$$\text{Изменение объема} = V' - V = 0.864V - V = -0.136V$$

Теперь найдем, на сколько процентов изменился объем:

$$\text{Процент изменения} = \left(\frac{\text{Изменение объема}}{V}\right) \times 100\%$$

Подставляем значения:

$$\text{Процент изменения} = \left(\frac{-0.136V}{V}\right) \times 100\% = -13.6\%$$

Таким образом, объем прямоугольного параллелепипеда уменьшится на 13.6%.

Задание№ 4 (4 балла)

Два щенка и три котёнка весят 10 кг, а три щенка и четыре котёнка весят 14 кг. Сколько весит один котёнок?

обозначим вес щенка как x кг, а вес котёнка как y кг.

У нас есть два уравнения на основе условий задачи:

1. Два щенка и три котёнка весят 10 кг:

$$2x + 3y = 10 \quad (1)$$

2. Три щенка и четыре котёнка весят 14 кг:

$$3x + 4y = 14 \quad (2)$$

Теперь решим эту систему уравнений.

Сначала выразим x из первого уравнения (1):

$$2x + 3y = 10$$

$$2x = 10 - 3y$$

$$x = \frac{10 - 3y}{2} \quad (3)$$

Теперь подставим x из уравнения (3) во второе уравнение (2):

$$3\left(\frac{10 - 3y}{2}\right) + 4y = 14$$

Умножим всё уравнение на 2, чтобы избавиться от дроби:

$$3(10 - 3y) + 8y = 28$$

$$30 - 9y + 8y = 28$$

$$30 - y = 28$$

$$-y = 28 - 30$$

$$-y = -2$$

$$y = 2$$

Теперь, когда мы нашли y (вес одного котёнка), подставим его обратно в любое из уравнений, чтобы найти x. Используем уравнение (1):

$$2x + 3(2) = 10$$

$$2x + 6 = 10$$

$$2x = 10 - 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Таким образом, вес одного котёнка $y = 2$ кг.

Ответ: 1 котёнок весит 2 кг.

Задание№5 (5 баллов)

В кружке собрались ребята, занимающиеся различными видами искусства: 20 любят рисовать и увлекаются этим профессионально, т.е. художники, 8 музыкантов и 15 танцоров. Известно, что каждый ребенок занимается двумя видами искусства. Сколько всего участников в кружке?

Пусть x — общее количество участников кружка. Поскольку каждый из них занимается двумя видами искусства, общее количество увлечений можно подсчитать, сложив количество художников, музыкантов и танцоров:

$$20 + 8 + 15 = 43.$$

Но так как каждый участник кружка занимается двумя видами искусства, общее количество увлечений будет в два раза больше, чем количество участников, то есть:

$$2x = 43.$$

Следовательно, количество участников:

$$x = \frac{43}{2} = 21.5.$$

Так как число участников должно быть целым, округляем до 22. Таким образом, в кружке 22 участника.

Ответ. В кружке могут быть либо 21, либо 22 уч.

(Оба ответа принимаются)

Задание№6 (6 баллов)

У каждого осьминога по 8 щупалец. Могут ли 7 осьминогов сцепиться щупальцами так, чтобы ни одно щупальце не осталось свободным?

У каждого осьминога 8 щупалец, а у 7 осьминогов всего будет $7 \times 8 = 56$ щупалец.

Чтобы осьминоги могли сцепиться щупальцами без остатка, число щупалец должно быть чётным, поскольку каждое соединение между двумя осьминогами использует два щупальца.

Поскольку 56 — чётное число, осьминоги могут сцепиться щупальцами так, чтобы не осталось свободных щупалец.

Ответ: Да, 7 осьминогов могут сцепиться щупальцами, не оставив свободных.

Задание№7 (6 баллов)

Маленький робот движется по наклонной дорожке. За первый час он поднялся на 12 см, за второй час спустился на 5 см, за третий час снова поднялся на 12 см, а за четвёртый спустился на 5 см. Так он продолжал чередовать подъём и спуск в течение нескольких часов. На сколько сантиметров робот поднимется за 13 часов?

Данные задачи:

- За 1-й час робот поднимается на 12 см.
- За 2-й час спускается на 5 см.
- Этот процесс продолжается, чередуя подъём и спуск.

Подсчет изменения высоты за 2 часа

Каждые 2 часа робот поднимается и спускается:

- Подъём за 1 час: +12 см
- Спуск за 2 час: -5 см

Теперь посчитаем, сколько робот поднимется за 2 часа:

$$12 \text{ см (подъём)} - 5 \text{ см (спуск)} = 7 \text{ см (чистый подъём за 2 часа)}$$

Подсчет за 13 часов

Теперь давайте разберём, сколько полных двухчасовых циклов укладывается в 13 часов:

- В 13 часах 6 полных двухчасовых циклов (12 часов), а затем остается 1 час.

Чистый подъём за 12 часов:

$$6 \text{ циклов} \times 7 \text{ см} = 42 \text{ см}$$

Подъём за 13-й час:

В 13-й час робот снова поднимается на 12 см.

Общий подъём:

Теперь добавим чистый подъём за 12 часов и подъём за 13-й час:

$$42 \text{ см (чистый подъём за 12 часов)} + 12 \text{ см (за 13-й час)} = 54 \text{ см}$$

Задание№8 (7 баллов)

Найти остаток от деления 7^{80} на 6

Решение:

1. Определим остаток от деления 7 на 6:

$$7 \div 6 = 1 \text{ (остаток } 1).$$

Поэтому:

$$7 \mod 6 = 1.$$

2. Посмотрим, как ведут себя степени числа 7 по модулю 6.

- $7^1 \mod 6 = 1$
- $7^2 = 49$, и $49 \div 6 = 8$ (остаток 1) Поэтому:

$$7^2 \mod 6 = 1.$$

3. Обобщим: Если $7 \mod 6 = 1$, то любая степень 7^n тоже будет давать остаток 1 при делении на 6. То есть:

$$7^n \mod 6 = 1 \text{ для любого } n.$$

4. Подставим 80: Поэтому:

$$7^{80} \mod 6 = 1.$$

Ответ:

Остаток от деления 7^{80} на 6 равен 1.

<u>Задание№9 (8 баллов)</u>

Зарплата сотрудника увеличилась на 12%, а через год снова на 25%. На сколько процентов увеличилась зарплата сотрудника в итоге?

Решение:

1. Предположим, что начальная зарплата сотрудника составляет 1000 единиц.
2. После первого повышения на 12%:

$$1000 \times 1.12 = 1120 \text{ единиц.}$$

3. После второго повышения на 25% от новой зарплаты:

$$1120 \times 1.25 = 1400 \text{ единиц.}$$

4. Определим общий процент увеличения от начальной зарплаты:

$$\text{Увеличение} = 1400 - 1000 = 400 \text{ единиц.}$$

$$\text{Процент увеличения} = \frac{400}{1000} \times 100\% = 40\%.$$

Задание№10 (8 баллов)

Разделить длину веревки в 2 метра на две части так, чтобы разность между длинами ее частей составляла 30 см.

Условия задачи

Длина верёвки — 2 метра. Нужно разделить её на две части так, чтобы разность между длинами частей была 30 см (0.3 метра).

Обозначим части

Пусть одна часть верёвки равна x метров, тогда другая часть будет y метров.

Уравнения

1. $x + y = 2$
2. $|x - y| = 0.3$

Решение

Рассмотрим случай, когда $x - y = 0.3$:

- Из второго уравнения: $y = x - 0.3$.
- Подставим в первое уравнение:

$$x + (x - 0.3) = 2 \implies 2x - 0.3 = 2 \implies 2x = 2.3 \implies x = 1.15 \text{ м}$$

$$y = 2 - x = 2 - 1.15 = 0.85 \text{ м}$$

Ответ

Верёвку можно разделить на части длиной 1.15 метра и 0.85 метра.

Задание№11 (8 баллов)

В вузе работает 150 преподавателей и их суммарный возраст составляет 4500 лет. Можно ли выбрать 80 человек из них, у которых суммарный возраст будет не менее 3000 лет?

Средний возраст преподавателей:

$$\frac{4500}{150} = 30 \text{ лет}$$

Нужно понять, возможно ли выбрать 80 преподавателей, чей суммарный возраст будет не менее 3000 лет. Проверим это, распределив возраст так, чтобы добиться максимального суммарного возраста для группы из 80 человек.

Возможная стратегия

- Пусть 80 преподавателей будут старше среднего возраста.
- Тогда оставшиеся 70 преподавателей будут моложе среднего возраста.

Если 80 преподавателей в сумме должны дать 3000 лет, тогда 70 преподавателей должны дать 1500 лет (так как суммарный возраст всех 150 преподавателей — 4500 лет):

$$4500 - 3000 = 1500 \text{ лет для оставшихся 70 преподавателей.}$$

Теперь давайте проверим, возможно ли, чтобы 70 преподавателей дали суммарный возраст 1500 лет. Средний возраст для этих 70 преподавателей будет:

$$\frac{1500}{70} = 21.43 \text{ года}$$

Таким образом, оставшиеся 70 преподавателей должны иметь средний возраст около 21.43 года.

Это вполне возможно, если среди преподавателей есть большая группа молодых сотрудников, чей возраст значительно ниже 30 лет. Тогда можно выбрать 80 более старших преподавателей, чей суммарный возраст будет не менее 3000 лет.

Задание№12 (8 баллов)

Можно ли соединить 100 компьютеров так, чтобы каждый из них был соединен с 7 другими?

Каждое соединение между двумя компьютерами можно представить как "рукопожатие". Если компьютер А соединен с компьютером В, то это одно соединение, и оно учтено для обоих компьютеров.

Если каждый компьютер соединен с 7 другими, то для 100 компьютеров общее количество таких соединений (или "рукопожатий") будет:

$$100 \times 7 = 700 \text{ соединений}$$

Но тут важно учитывать, что каждое соединение считается дважды — один раз для компьютера А и один раз для компьютера В. Поэтому, чтобы узнать реальное количество соединений, нужно 700 разделить на 2:

$$\frac{700}{2} = 350 \text{ реальных соединений}$$

Соединения должны быть целыми числами, но у нас 350 — это целое число. Это значит, что теоретически можно распределить 350 соединений между 100 компьютерами так, чтобы каждый компьютер был соединён ровно с 7 другими.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!