ИТОГИ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ «АНТОК-2023»

8-10 КЛАССЫ

Задание № 1 (2 балла)

Разложите число 40 на 2 слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Ответ 20 и 20, так как в другом случае будет (40-x)(40+x)=40-x^2. А это максимально при x=0.

Задание № 2 (3 балла)

Найти сумму всех 4-х значных чисел, делящихся на 300.

Решение.

Первое четырехзначное число, которое делится на 300 – это 1200, последнее четырехзначное число – это 9900, (на конце числа должно быть 00 и по признаку делимости должно делиться на 3). Сами числа образуют арифметическую прогрессию с разностью d=300. Число членов (9900-1200)/300+1=29+1=30.

Сумма равна ((1200+9900)/2)*30=166500.

Задание № 3 (3 балла)

По дороге в школу Ваня пересек дорогу, пробежав мимо 32-х столбов и это заняло у него 20 минут. Докажите, что найдутся два столба, расстояние между которыми Ваня пробежал менее, чем за 39 секунд.

Решение.

Если бы между всеми столбами были паузы не менее чем в 39 секунд, то Ваня затратил бы на их преодоление не менее 39*31=1209 секунд (между 32-мя столбами 31 промежуток), это больше, чем 20минут=20*60=1200 секунд, что противоречит условию.

Ответ. Найдутся два таких столба.

Задание № 4 (4 балла)
Решите уравнение

$$\frac{0{,}125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\frac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}$$

Задание №4

$$\frac{0{,}125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\frac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}$$

$$0{,}125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}\;;\qquad \frac{28}{63}=\frac{4\cdot 7}{7\cdot 9}=\frac{4}{7}\;;$$

Далее $8\frac{7}{16}=\frac{8\cdot 16+7}{16}=\frac{128+7}{16}=\frac{135}{16}$;

$$\begin{array}{r} 0{,}675 \\ \times\quad 2{,}4 \\ \hline 2700 \\ +\,1350 \\ \hline 1{,}6200 \end{array}$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{\frac{1}{8}x}{\left(\frac{19}{3\cdot 8}-\frac{21}{5\cdot 8}\right)\cdot\frac{135}{16}}=\frac{\left(1\frac{4}{9}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{1{,}62-0{,}02}$$

$$\frac{x}{8\left(\frac{19\cdot 5-21\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 8}\right)\cdot\frac{135}{16}}=\frac{\left(\frac{13}{3\cdot 3}-\frac{17}{3\cdot 7}\right)\cdot 0{,}7}{1{,}6}$$

$$\frac{x\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 2}{(95-63)\cdot 135}=\frac{\left(\frac{13\cdot 7-17\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 7}\right)\cdot 7}{16}$$

$$\frac{x\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 2}{32\cdot 135}=\frac{\frac{91-51}{9}}{16}$$

$$\frac{x\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{27}}=\frac{40}{9\cdot 16}$$

$$\frac{x}{2\cdot 9}=\frac{5}{9\cdot 2}\;\Rightarrow\; x=5$$

Ответ. 5

Задание № 5 (4 балла)

Последние семь цифр мобильного телефона указывают уникальный номер каждого абонента,

т.е. +7 (код города, где вы находитесь) и семь цифр, которые вы указали.

Какова вероятность правильно набрать 7-ти значный номер сотового телефона, если Оля забыла последние 4 цифры? Но, к счастью, Оля хотя бы помнит, что они различны. А вероятность в данном случае равна 1, деленной на число таких всевозможных наборов.

Решение. Последние цифры могут быть 0. Первую цифру выбираем 10-ю способами, вторую – 9ю, третью – 8-ю, четвертую – 7-ю способами, так как цифры не повторяются.

Вероятность будет равна 1/(10*9*8*7)=1/5040.

Задание № 6 (5 баллов)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ |y| - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение.

1) Пусть $y \geq 0 \iff |y| = y \iff$

$$\iff \begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - 2 = 0 \\ x = 1 - y \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\iff (0;1)$ – решение системы.

2) Пусть $y < 0 \iff |y| = -y \iff$

$$\iff \begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ -y - x - 1 = 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

Сложим 1-е и 2-е уравнение

$-2 = 0$ – ложно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений нет.

Проверка.

Подставим $x = 0$, $y = 1$ в систему

$$\begin{cases} 1 + 0 - 1 = 0 \\ |1| - 0 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0;1) \text{ – решение системы}$$

Задание № 7 (5 баллов)

Известно, что у пианино 36 черных клавиш и 52 белые клавиши. Ученику дали задание сочинить мелодию. Для нее надо извлечь 3 звука, нажав на черные клавиши, и 4 звука, нажимая на белые клавиши. Сколько может получиться мелодий, если нельзя нажимать на одну и ту же клавишу несколько раз подряд?

№7

36 черн. кл.
52 бел. кл.

мелодия: 3 черн. + 4 бел.
нельзя нажим. одну и ту же клавишу несколько раз подряд => единственная подходящая комбинац. чередование клавиш: бчбчбчб

	позиция 1	2	3	4	5	6	7
комбинации	52	36	52	36	52	36	52

всего комб. мелодий: $52 \cdot 36 \cdot 52 \cdot 36 \cdot 52 \cdot 36 \cdot 52 =$
$= 341130756096$ Ответ: 341130756096

Сюда входит

36*35*34=42840 – столько звуков извлечено будет с помощью черных клавиш.

52*51*50*49=6497400 – столько звуков извлечено будет с помощью белых клавиш.

По правилу произведения 42840*6497400=278348616000 звуков, можно считать мелодий.

Задание № 8 (6 баллов)

Сколько можно составить различных комбинаций для получения шифра из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в которых цифра 0 расположена правее 1?

Решение. 10! - число всех перестановок, но в них входят и те, в которых 0 слева от 1 расположен. Поэтому 10!/2.

Задание № 9 (7 баллов)

Вычислите разность кубов двух натуральных чисел, если их разность равна 12, а произведение 28. Найдите эти числа.

Решение.

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)((x-y)^2+3xy)=$$

$$=12*(12^2+3*28)=12*480=2736$$

$$x-y=12 \Leftrightarrow x=y+12 \Leftrightarrow (y+12)y=28 \Leftrightarrow y^2+12y-28=0$$

Решаем квадратное уравнение.

$$\frac{D}{4}=6^2+28=64=8^2$$

$$x=-6+8=2$$

$x=-6-8=-14$ – не является натуральным числом.

$$y=6+8=14$$

Ответ. 14 и 2.

Задание № 10 (7 баллов)

Прямоугольный участок ландшафтный дизайнер разделила диагональю на два участка. У получившегося прямоугольного треугольника длина одного из катетов больше длины другого на 10 м и меньше длины гипотенузы на 10 м. Найдите периметр первоначального прямоугольного участка.

Решение.

X – длина катета,

X-10 – длина другого катета,

X+10 – длина гипотенузы.

По теореме Пифагора: $(x-10)^2+x^2=(x+10)^2$.

$x^2=(x+10)^2-(x-10)^2$.

Справа разность квадратов

$x^2=(x+10-x+10)(x+10+x-10)$.

$20*2*x=x^2$

x=40 м – один катет

*другой катет равен 30 м, а периметр прямоугольного участка равен: (40+30)*2=140м*

Задание № 11 (7 баллов)

Петя пришел в цирк посмотреть шоу львов, которые показывают братья Кнутовы. По их сигналу львы бегут вдоль арены цирка по кругу (вдоль внешней стороны арены) навстречу друг другу, изначально двигаясь в противоположных направлениях. Величавый мощный лев Тишка пробежал на 9 метров больше своего собрата до момента их встречи и, продолжая бежать дальше в том же направлении, что и бежал, через 9 секунд подбежал к брату Кнутову, который так и стоял на том же месте, не двигаясь и не перемещаясь по арене, что и в начале выступления. Второй же лев только через 16 с от момента встречи с Тишкой подбежал к Кнутову. Какая скорость была у Тишки? Какова длина всей арены?

Решение.

Пусть x м пробежал до места встречи второй лев. Тогда Тишка пробежал до встречи $x+9$ м. Скорость Тишки $x/9$ м/с, второго $\frac{x+9}{16}$ м/с

По условию $9\frac{x+9}{x}=16\frac{x}{x+9}$. Решая уравнение получим $x=27$. Тогда скорость Тишки равна 27/9=3 м/с. Длина всей арены равна $2x+9=54+9=63$ м.

Задание № 12 (8 баллов)

На плоскости даны 4 точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что, хотя бы один из образовавшихся треугольников с вершинами в этих точках не является остроугольным.

Решение.

Случай 1. Среди четырех точек есть точка B, лежащая на отрезке AC. Тогда один из углов ABD и CBD прямой или тупой.

Случай 2. Точки образуют выпуклый четырехугольник ABCD. Среди углов этого четырехугольника найдется прямой или тупой.

Случай 3. Точка D лежит внутри треугольника ABC. Тогда среди углов ADB, BDC, CDA найдется тупой.

Задание № 13 (8 баллов)
Известно, что $\sqrt{64-x^2}+\sqrt{14-x^2}=4$. Вычислить $\sqrt{64-x^2}-\sqrt{14-x^2}$

Не существует такого x, так как исходное уравнение не имеет решений

Зад. 13. $\sqrt{64-x^2}+\sqrt{14-x^2}=4$

то, что под корнем не может быть меньше 0

$\Downarrow$

$|x| \le \sqrt{14}$

но при $x=\sqrt{14}$ – макс. значение x

$\sqrt{64-x^2}=\sqrt{50}$ – мин. значение $\sqrt{64-x^2}$

$\sqrt{50} > 7$

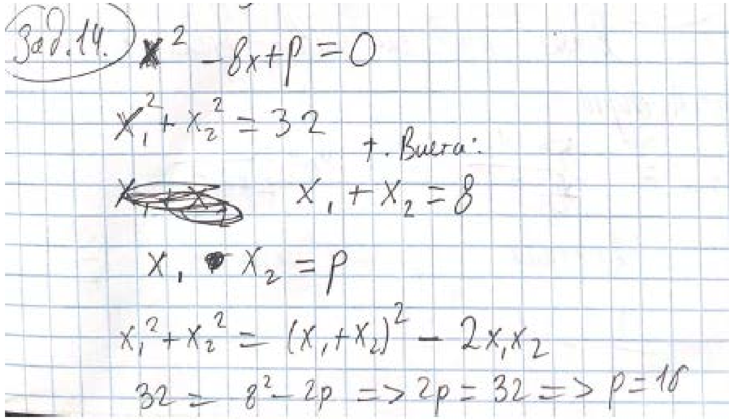
Но! если $\sqrt{64-x^2} > 7$, значит $\sqrt{14-x^2}$ должно быть равно ~~−3 и~~ менее, чем −3

а это невозможно.

Не существует такого x, значит $\sqrt{64-x^2}-\sqrt{14-x^2}$ вычислить невозможно.

В уравнении $x^2 - 8x + p = 0$ известно, что сумма квадратов его корней равна 32. Найдите p

Для справки: Если числа x_1 и x_2 таковы, что их сумма равна второму коэффициенту уравнения $x^2 + bx + c = 0$, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену, то эти числа являются корнями $x^2 + bx + c = 0$.



Зад.14. $x^2 - 8x + p = 0$

$x_1^2 + x_2^2 = 32$

т. Виета:

$x_1 + x_2 = 8$

$x_1 \cdot x_2 = p$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$32 = 8^2 - 2p \Rightarrow 2p = 32 \Rightarrow p = 16$

Решение.

Имеем уравнение:
x^2 -8 * x + p = 0;
Известно, что:
x1^2 + x2^2 = 32;
Воспользуемся теоремой Виета - запишем уравнение суммы корней квадратного уравнения:
x1 + x2 = 8;
Возводим в квадрат данное равенство:
(x1 + x2)^2 = 64;
x1^2 + 2 * x1 * x2 + x2^2 = 64;
По условию задачи сумма квадратов корней уравнения равна 32, подставим выражение в данное уравнение:
32 + 2 * x1 * x2 = 64;
x1 * x2 = 16 .
Произведение корней равно значению p, исходя из теоремы Виета. Следовательно,
p = 16.

Ответ. 16

Задание № 15 (8 баллов)

Если вы хотите положить деньги под 10% на три года в Сбербанк с возможностью снимать и докладывать деньги в конце каждого года после начисления процентов, то что будет выгоднее: положить 5000 после первого года и снять всю сумму после трех лет или снять 5000 после начисления процентов в конце первого года, доложить 5000 рублей после второго года начисления процентов и снять все со вклада после трех лет. Сколько у меня будет денег в первом и во втором случае, если я положу изначально на счет x рублей?

Решение.

Пусть я положила в банк x рублей. Подготовим выписки из лицевых счетов в первом и во втором случае.

Выписка из лицевого счета, когда я кладу после первого года 5 000 рублей.

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Принято от клиента	5000	$1{,}1x + 5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x + 5500$
15.01.14	Выдано клиенту	0	$1{,}1^2x + 6050$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x + 6655$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x +6655$	0

Выписка из лицевого счета во втором случае.

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Выдано клиенту	5000	$1{,}1x - 5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x - 5500$
15.01.14	Принято от клиента	5000	$1{,}1^2x - 500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x - 550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x - 550$	0

Ответ: Снимать и докладывать не выгодно

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!