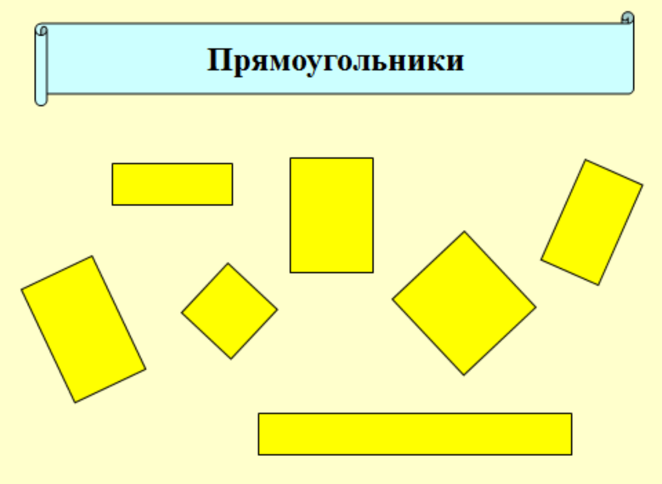
Итоги Олимпиады по математике «АНТОК-2022»

8-9 классы

Задание № 1 (2 балла)

У Маши есть кусочки сыра в виде прямоугольников. Одна сторона прямоугольника равна 18 см. Вторая – на 6 см больше ее. ***Вычислите периметр и площадь этого прямоугольника. Если разрезать кусочек сыра пополам, параллельно самой длинной его стороне и ровно посередине короткой стороны, какой станет площадь одного отрезанного кусочка? А если разрезать только что отрезанный кусочек ровно пополам, перпендикулярно самой длинной стороне, то площадь отрезанного в этот момент кусочка какой станет? Какую часть от площади исходного куска сыра составляет получившийся кусочек?***



Решение.

Длина второй стороны равна 18+6=24 см. Периметр равен (18+24)*2=84 см. А площадь равна 18*24=432 кв. см.

Если разрезать пополам параллельно длинной стороне, то площадь станет равной 18*(24/2)=18*12=216 кв. см.

Режем поперёк и посередине сторону в 18 см. Она становится 9 см. Ищем площадь 9*12= =108 кв. см.

432/108=4 – площадь самого первого куска сыра уменьшилась в 4 раза.

Задание № 2 (3 балла)

Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 5, 9. ***Найдите его.***

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Решение.

В конце квадрата может быть только 0 или 5, так как будь там 2 - в конце была бы 4 (например, 12*12=144).

Число, оканчивающееся на 9 и возведенное в квадрат, даёт в конце 1.

Будь у числа в конце 0, в его квадрате было бы 00 (например, 10*10=100).

Значит, мы имеем число вида (029)5.

0 не может быть первым. Значит, имеем четыре числа:

9205

9025

2905

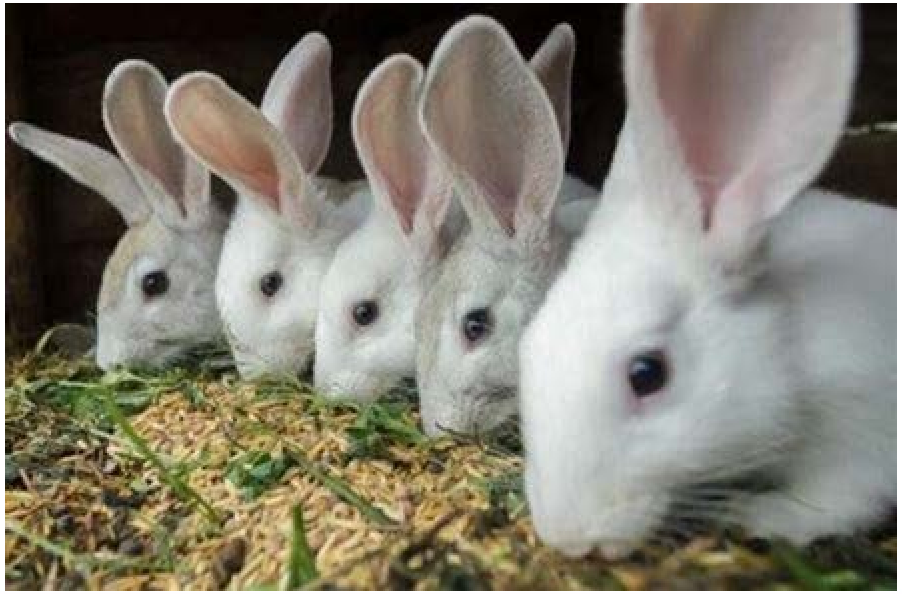
2095

Полный квадрат из них дает:

$9025 = 95^2$.

Задание № 3 (3 балла)

Моя бабушка выращивает кроликов. Чтобы они где-то жили, бабушке пришлось покупать им клетки и рассаживать по ним кроликов таким образом, чтобы в одной клетке сидели кролики одной породы. У нее сейчас 25 клеток. Проводя процесс рассадки, бабушка заметила, что кролики у нее трех пород. ***Всегда ли будет как минимум девять клеток с кроликами одной породы?***

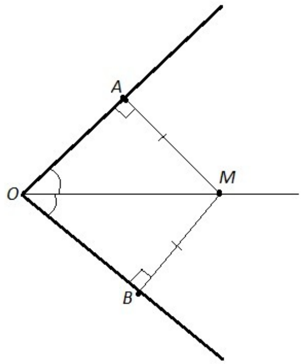


Решение.

Разделим 25 клеток на породы. 3*8=24, значит каждой породы точно по 8 клеток, и одна клетка неизвестной породы (но какой-то одной из трех пород). А значит в любом случае будет 9 клеток какой-то одной породы. Теоретически может быть и больше клеток одной породы. Ведь какой именно породы не указано.

Задание № 4 (3 балла)

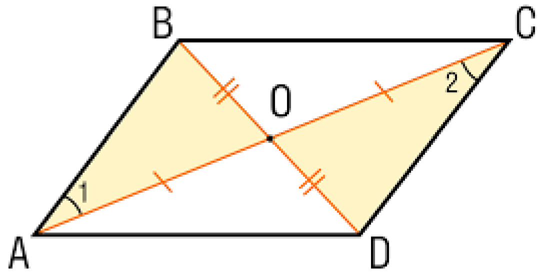
Дизайнер парковых ландшафтов, делая проект клумбы, должен придумать, как оформить перспективу. ***Вопрос: как провести прямую через произвольную точку, лежащую внутри угла таким образом, чтобы эта точка делила сторону получившегося треугольника пополам.***



Решение.

Надо сделать эту точку центром параллелограмма.

Диагонали параллелограмма делятся своей точкой пересечения пополам.



Задание № 5 (4 балла)

Две компании, «Точка» и «Лидер», решили дарить клиентам шариковые ручки со своим логотипом. Их менеджеры заказали эти сувениры в фирме под названием «Веста». Одна ручка стала стоить больше пятидесяти рублей. Компания «Точка» заплатила 1428 рублей, а компания «Лидер» – 588 рублей. ***Сколько ручек им сделала фирма «Веста», и по какой цене она их им продала, если стоимость ручки не превышает 100 рублей.***

Решение. Пусть ручка стоит r рублей. Тогда числа 1428 и 588 делятся на r. Поскольку наибольший общий делитель чисел 1428 = 3*7*17*4 и 588=7*7*3*4 равен 3*7*4=84, то и 84 делится на r. Поскольку $r > 50$ и $r<100$, то $r = 84$. Тогда всего ручек было куплено 1428:84=17 компанией «Точка».

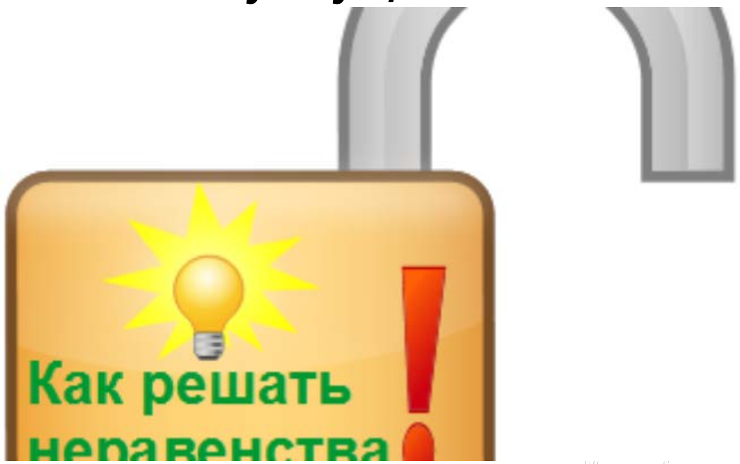
588:24=7 компанией «Лидер».

Всего фирма «Веста» продала17 + 7 =24 ручки.

Ответ. 24.

Задание № 6 (4 балла)

Найдите сумму целых положительных чисел, удовлетворяющих неравенству $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}.$



Решение.

Неравенство из условия равносильно неравенству

$72-36x>15-4(4x-3)$,

т.е. $20x<45$

или

$x<9/4$.

Данному неравенству удовлетворяют целые положительные числа 1 и 2, сумма которых равна 3.

Задание № 7 (4 балла)

Заместитель декана (замдекана) вуза при заселении в общежитие знает, что по правилам вселения, нельзя вселить больше трех студентов в комнату. На адаптационные курсы, проводимые ежегодно университетом, приедут 100 абитуриентов, поступивших на первый курс с трех различных факультетов. В одну комнату можно селить только студентов одного пола и с одного факультета. ***Сколько нужно свободных комнат замдекану, чтобы точно поселить слушателей адаптационных курсов?***

Решение задания № 7 (4 балла)

Решение. Все студенты делятся на шесть групп: мужчины/женщины с факультета I. Мужчины/женщины, с факультета II. Мужчины/женщины, с факультета III.

В одну комнату можно селить только людей из одной перечисленной выше группы.

Количество людей в каждой из шести групп поделим с остатком на 3. Если в какой-то группе получился остаток 1, поселим любого 1 человека из неё в отдельный номер.

Если получился остаток 2, поселим любых 2 человек из неё в отдельный номер. Теперь в каждой группе количество нерасселённых студентов делится на 3.

После того, как мы расселили остатки каждой группы, осталось сколько-то нерасселённых людей. Это суммарное количество не больше 100 и не меньше 88 (ведь все шесть остатков в сумме дают не более $6 \cdot 2 = 12$, а $100 - 12 = 88$). При этом это число делится на 3, поэтому оно равно одному из значений 90, 93, 96, 99 (и всех соответствующих людей можно расселить в комнаты по три человека).

Рассмотрим несколько случаев.

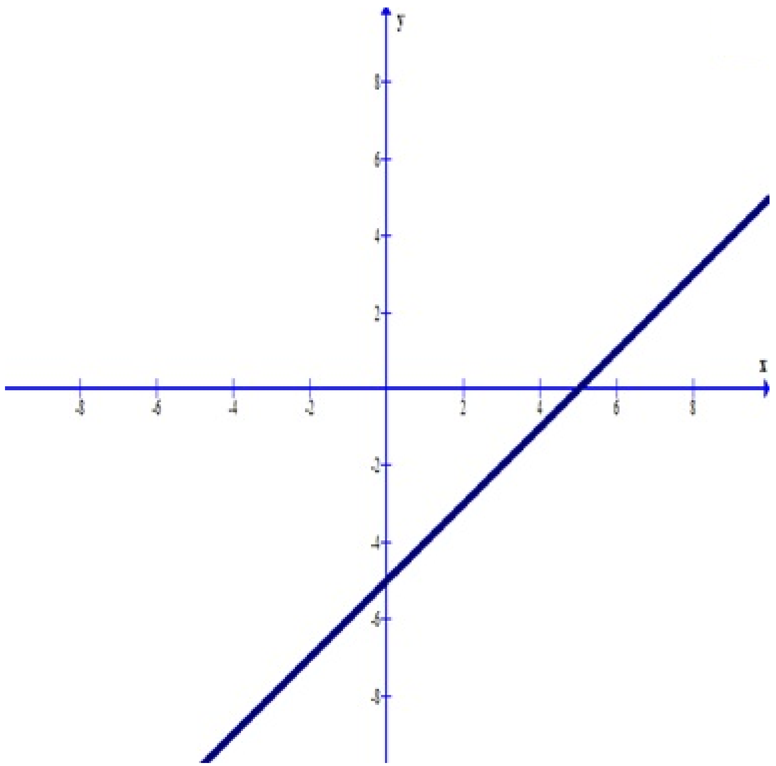
- Если осталось 90 человек, то им нужно $90 : 3 = 30$ комнат, остальным 10 людям из 6 групп точно хватит 6 комнат. Всего нужно не больше 36 комнат.
- Если осталось 93 человека, то им нужна $93 : 3 = 31$ комната, остальным 7 людям из 6 групп точно хватит 6 комнат. Всего нужно не больше 37 комнат.
- Если осталось 96 человек, то им нужно $96 : 3 = 32$ комнаты, остальным 4 людям точно хватит 4 комнаты. Всего нужно не больше 36 комнат.
- Если осталось 99 человек, то им нужно $99 : 3 = 33$ комнаты, оставшемуся одному точно хватит 1 комнаты. Всего нужно не больше 34 комнат.

Таким образом, 37 комнат точно хватит.

Также приведём пример, когда необходимо хотя бы 37 комнат. Пусть распределение людей по шести группам такое: 20, 16, 16, 16, 16, 16. Для группы из 20 человек необходимо выделить не менее 7 комнат, для каждой из остальных — не менее 6 комнат. Итого необходимо не менее $7 + 6 * 5 = 37$ комнат. **Ответ. 37 комнат.**

Задание № 8 (4 балла)

Прямая линия проведена таким образом, что она отсекает от четвертой координатной четверти треугольник с длинами сторон, равными 5. ***Найдите уравнение этой линии.***



Решение. Данный график прямой образует с осью абсцисс такой же угол в 45, как и биссектриса первого и третьего координатных углов. Значит, ее угловой коэффициент равен 1. Поскольку при x = 0 значение функции равно -5 (прямая отсекает треугольник в IV четверти), то искомая функция есть y = x-5.

Ответ. y = x-5

Задание № 9 (6 баллов)

Павел на школьных летних каникулах учил таблицу квадратов чисел и повторял формулы сокращенного умножения. Он записал некое натуральное число, для которого верны два из трех следующих утверждений:

а) если к этому числу прибавить пятьдесят один, то получим точный квадрат,

б) последняя цифра выписанного Павлом числа – единица,

в) если из этого числа вычесть тридцать восемь, то получим точный квадрат.

Найдите число, записанное Пашей. При решении используйте формулу разности квадратов, а также замеченный Павлом факт, что если два числа отличаются на число К, то разность их квадратов тоже делится на это число К.

Решение.

Как сказано в условии задачи, одно из этих утверждений является ложным. В первую очередь на себя обращает внимание условие б). Если последняя цифра равна 1, то условие а) не верно, так как нет точных квадратов оканчивающихся на 2, условие в) тоже не может быть верным, так как в этом случае последняя цифра равна 3 и таких точных квадратов нет. Следовательно, если условие б) верно, то условия а) и в) являются не верными, что не подходит по условию задачи (должно быть два верных и одно неверное утверждение из этих трех). Следовательно, условие б) должно быть ложным, а а) и в) - истинными.

Пусть искомое число равно А.

Если б) истинно, и А кончается на 1, то А+51 на 2, а А-38 на 3. Такие числа не могут быть квадратами, тогда условия а) и в) ложны. Этого не может быть, значит, ложно условие б).

Теперь осталось разобраться с квадратами. Итак, про число А нам известно, что А+51 и А-38 - два квадрата.

- А + 51 = a^2; А - 38 = b^2.
- Далее a^2 - b^2 = 89.
- Или (a + b)(a - b) = 89.
- Возможно только, что
- a + b = 89; a - b = 1.
  Подбором находим a = 45; b = 44.
- Следовательно, А = a^2 - 51 = 45^2 – 51 или А=b^2+38=44*44+38=1974.
  То есть искомое число А = 1974.
  Ответ: 1974.

Задание № 10 (6 баллов)

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 51%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 1%. ***Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?***

Решение.

Условие «если бы зарплата отца увеличилась вдвое, доход семьи вырос бы на 51%» означает, что зарплата отца составляет 51% дохода семьи. Условие «если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, доход семьи сократился бы на 1%», означает, что 1/2 стипендии составляют 1% дохода семьи, то есть вся стипендия дочери составляет 2% дохода семьи. Таким образом, доход матери составляет 100-51-2=47% дохода семьи. **Ответ. 47%.**

Задание № 11 (8 баллов)

Целые числа *k, n, m в* указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число *k* на 33 меньше, чем *m*, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел *k, n* и *m*? ***Найдите эти числа.***

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
1. Определение (реккурентная формула)	$a_n = a_{n-1} + d$	$b_n = b_{n-1} q$
2. Формула n-ого члена	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
3. Сумма первых n членов прогрессии	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$	$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ $S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$ $S = \frac{b_1}{1 - q}$
4. Свойства	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$

Решение.

Эти числа в геометрической прогрессии будут выглядеть так k, qk, q^2 *k.* Так как прогрессия не является возрастающей, то q<0. И по условию q целое.

По условию $q^2 k - k = 33$.

Отсюда $k(q^2-1)=33=3*11*1$

Перебираем случаи:

k=1, $q^2-1=33$, $q^2=34$ – *здесь q не будет целым числом.*

k=3, $q^2-1=11$, $q^2=22$ – *здесь q не будет целым числом.*

k=11, $q^2-1=3$, $q^2=4$ – *отсюда q=-2.*

Следовательно, k=11, *n=-22, m=44.*

Сумма этих чисел равна 33.

Задание № 12 (8 баллов)

При каких значениях *x* уравнение, описывающее изменение параметров технологического процесса, имеет единственное решение? ***Найдите решение уравнения. Расположите корни в порядке возрастания:***

$$\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}=7\left(\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}\right)-1$$

Решение.

Пусть $t=\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}$;

Тогда

$$t^2=\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{4}{(x-1)^2}-1.$$

Имеем:

$$2t^2+2=7t-1 \Leftrightarrow 2t^2-7t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}; \\ t=3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Если $t=\frac{1}{2}$, то

$$\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ (x-1)^2-8=2(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=5. \end{array}\right.$$

Если t=3, то

$$\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ (x-1)^2-8=12(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x^2-14x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7-\sqrt{44}, \\ x=7+\sqrt{44}. \end{array}\right.$$

Ответ. -1; $7-\sqrt{44}$; 5; $7+\sqrt{44}$

СПАСИБО
за внимание!